OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 24 februarie 2024

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

Considerăm numerele reale nenule x *și* y astfel încât:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2\sqrt{3}-3} \quad \text{și} \quad y+\frac{1}{y}=\frac{3}{2\sqrt{3}+3}\ .$$

Arătați că suma $x^4+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{x^4}+y^4$ este număr natural.

Soluție:

Prin raționalizare se arată că $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{3}+3$……………………...………………...…….1p

Prin raționalizare se arată că $y+\frac{1}{y}=2\sqrt{3}-3$………………...…………...………………..1p

Calculează suma $x^2+\frac{1}{x^2}=21+12\sqrt{3}-2=19+12\sqrt{3}$………...………………………1p

Calculează suma $y^2+\frac{1}{y^2}=21-12\sqrt{3}-2=19-12\sqrt{3}$…………………………...….1p

Arată că $x^4+\frac{1}{x^4}=361+432+456\sqrt{3}-2=791+456\sqrt{3}$…………………...…...……1p

Arată că $y^4+\frac{1}{y^4}=791-456\sqrt{3}$………………………………………….…..……………1p

Finalizare $x^4+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{x^4}+y^4$=1582 care este număr natural…………………..…………...1p

SUBIECTUL II

Considerăm numerele naturale x, y și z, diferite și nenule care verifică inegalitatea:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4 - 4y + y^2} + \sqrt{-6z + z^2 + 9} \leq 1.$$

Determinați partea întreagă a sumei: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Soluție:

Avem $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(z-3)^2} \leq 1$……………………………………..…...…1p

Deci $|x-1| + |y-2| + |z-3| \leq 1$…………………………………………………….....1p

Și cum x, y, z sunt numere naturale și avem sumă de numere nenegative obținem situațiile:

$\begin{cases} |x-1| = 0 \\ |y-2| = 0 \\ |z-3| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$……………………………………………..……………...…1p

$\begin{cases} |x-1| = 1 \\ |y-2| = 0 \\ |z-3| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \; sau \; x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ ……………………………………..………………...…1p

$\begin{cases} |x-1| = 0 \\ |y-2| = 1 \\ |z-3| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \; sau \; y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$……………………………………..............……...…1p

$\begin{cases} |x-1| = 0 \\ |y-2| = 0 \\ |z-3| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 \; sau \; z = 2 \end{cases}$ ……………………………………………………...…...…1p

În concluzie

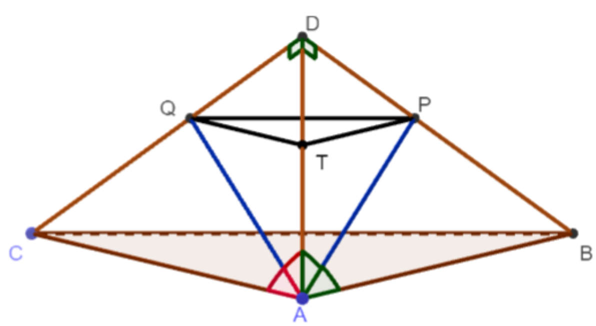
$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \left[\frac{11}{6}\right] = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \left[\frac{7}{4}\right] = 1 \end{cases}$ ………………………………………….…………....…..1p

SUBIECTUL III

Fie triunghiul echilateral ABC cu $AB = 15\sqrt{2}\ cm$ și $D \notin (ABC)$, astfel încât $AD = BD = CD = 15\ cm$. În triunghiul ABD, $(AP$ este bisectoarea $\sphericalangle DAB, P \in BD$, iar în triunghiul ADC, $(AQ$ este bisectoarea $\sphericalangle DAC, Q \in CD$. Se consideră $T \in AD$, astfel încât $\frac{TD}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se arate că:

a) $(PTQ)||(ABC)$
b) $AD \perp PQ$

Soluție:



a) În triunghiul ABD, $(AP$ este bisectoarea $\sphericalangle DAB, P \in BD \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{DT}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow TP||AB$ 1p

În ΔADC, $(AQ$ este bisectoarea $\sphericalangle DAC, Q \in CD \Rightarrow \frac{DQ}{QC} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{DQ}{QC} = \frac{DT}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow TQ||AC$ 1p

Din relațiile $TP||AB, TQ||AC, TQ, TP \subset (TPQ), AB, AC \subset (ABC), TQ \cap TP = \{T\}$, $AB \cap AC = \{A\} \Rightarrow (TPQ)\ ||(ABC)$ 1p

b) Verificăm R.T.P în triunghiul DAB: $AD^2 + DB^2 = 450$; $AB^2 = 450 \Rightarrow AD^2 + DB^2 = AB^2 \Rightarrow AD \perp DB$ 1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Verificăm R.T.P în triunghiul ADC: $AD^2 + DC^2 = 450$; $AC^2 = 450 \Rightarrow AD^2 + DC^2 = AC^2 \Rightarrow AD \perp DC$ 1p

Din relațiile $AD \perp DB$, $AD \perp DC$, $DB \cap DC = \{D\}$, $DB, DC \subset (DBC) \Rightarrow AD \perp (DBC)$ 1p

Cum $PQ \subset (DBC) \Rightarrow$ concluzia $AD \perp PQ$ 1p

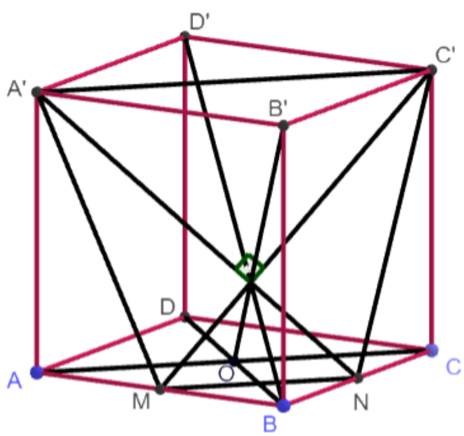
SUBIECTUL IV

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, centrul O al feței $ABCD$, iar punctele Mși N sunt mijloacele muchiilor AB, respective BC. Arătați că:

a) Dreptele $D'B, A'N, C'M$ *și* $B'O$ sunt concurente.
b) Patrulaterul $MNC'A'$ este ortodiagonal.

(S.G.M.10/2023)

Soluție:



a) $BN || A'D' \Rightarrow A', B, N, D'$ coplanare, fie $AB = x \Rightarrow BN = \frac{x}{2}$; $BN || A'D' \Rightarrow \Delta BPN \sim \Delta D'PA' \Rightarrow \frac{BP}{PD'} = \frac{NP}{PA'} = \frac{BN}{A'D'} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$, unde $\{P\} = A'N \cap D'B$..1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Analog, dacă $\{Q\} = D'B \cap C'M$ și $\{S\} = B'O \cap C'M$ avem $\Delta MQB \sim \Delta C'QD' \Rightarrow \frac{BP}{PD'}\ \frac{BQ}{QD'} = \frac{MQ}{QC'} = \frac{1}{2}$ și $\Delta MSO \sim \Delta C'OB' \Rightarrow \frac{OS}{SB'} = \frac{MS}{SC'} = \frac{1}{2}$.. ……………………………………………1p

Deci $\frac{BP}{PD'} = \frac{BQ}{QD'} = \frac{1}{2}$ și utilizând faptul că împărțirea unui segment într-un raport dat e unică obținem $P = Q$ și din $\frac{MQ}{QC'} = \frac{MS}{SC'} = \frac{1}{2}$ obținem $Q = S \Rightarrow P = Q =$ S și dreptele $D'B, A'N, C'M$ și $B'O$ sunt concurente………………………………………………………………………..……1p

b) $MN \parallel AC \parallel A'C' \Rightarrow MN \parallel A'C' \Rightarrow M, N, A', C'$ coplanare, $\Delta\ ABN$ dreptunghic în $B \Rightarrow AN^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4}$, $\Delta\ A'AN$ dreptunghic în $A \Rightarrow A'N^2 = x^2 + \frac{5x^2}{4} = \frac{9x^2}{4} \Rightarrow$
$A'N = \frac{3x}{2}$…………………………………………………………………………………1p

Avem $BN || A'D' \Rightarrow \frac{PN}{PA'} = \frac{BN}{A'D'} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PN}{PA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PN}{PA'+PN} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}; \frac{PN}{\frac{3x}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$
$PN = \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{2}$……………………………………………………………………..………1p

La fel se arată că $MP = \frac{x}{2}$; MN linie mijlocie în $\Delta\ ABC \Rightarrow MN = \frac{x\sqrt{2}}{2}$……………………...1p

Verificăm R.T.P: $MP^2 + NP^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$, $MN^2 = \frac{x^2 \cdot 2}{4} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow MP^2 + NP^2 = MN^2 \Rightarrow$
$MP \perp PN \Rightarrow MNC'A' -$ ortodiagonal………..…………………………………….......1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro